KSI 2014/2015

Úloha 4-1: Karlík a letenky

Jan Horáček
Gymnázium, Brno, Vídeňská 47; jan.horacek@seznam.cz

14. března 2015

1 Předpoklady

Vycházejme z toho, že jsou splněny předpoklady dané zadáním a diskuzí na webových stránkách. Pak zejména:

1. Letiště jsou seřazena v lineární datové struktuře a lze je indexovat `1..n`.
2. Víme, že hledáme kratší cestu pouze mezi letišti x a $x+1$, což zejména znamená, že nehledáme kratší cesty mezi všemi možnými letištmi (resp. kratší alternativu všech cest - hran v grafu).
3. Pro uložení grafu požijme matici sousednosti [1] `graf`, kde prvky matice jsou čísla, která mají význam ceny cesty (hrany). Neexistující hrana je identifikována číslem 0. Každá hrana je zaznamenána u obou vrcholů. Matice se indexuje `graf[x,y]`.
4. Cesta z letiště n do letiště 0 neexistuje ($n+1 \neq 0$).

2 Řešení

Nyní se už nabízí poměrně přímočaré řešení.

```
for x in 1..(n-1):
 if (graf[x,x+1] > 0):
  for y in 1..n:
   if (graf[x,y] > 0) && (graf[x+1,y] > 0) &&
      (graf[x,y]+graf[x+1,y] < graf[x,x+1]):
    result.Add(x)
    break;
```

Řečeno lidsky:

1. Projdeme všechny potenciálně drahé přímé hrany cyklem přes vrcholy `1..n-1` ($n-1$ proto, že procházíme vlastně hrany, nikoliv vrcholy).
2. Ověříme, že existuje cesta mezi letištěm x a letištěm $x+1$.

3. Pokud taková cesta neexistuje, není možné jí "zlevnit" a tudíž pokračujeme dále na další potenciální cestu. Pokud cesta ceny `graf[x, x+1]` existuje, přejdeme ke kroku 4.

4. Nyní hledáme alespoň jednu levnější cestu. Levnější cesta existuje v případě, že existují cesty $x \to y$ a $y \to x + 1$. My navíc hledáme takovou cestu vedoucí přes vrchol y, jejíž celková cena (složená z cen svou výše zmíněných cest) je menší, než cena z letiště x do letiště $x+1$, neboli `(graf[x,y]+graf[x+1,y] < graf[x,y+1])`.

5. Pokud najdeme alespoň jednu takovou cestu, označíme Karlíkovi letiště x. Cesty přes další letiště y není nutné kontrolovat, protože nám pro označení cesty $x \to x + 1$ stačí (dle zadání) alespoň jedna nalezená cesta přes vrchol y. Vnitřní cyklus tedy končí.

3 Závěr

Asymptotická časová složitost výše uvedeného algoritmu je $O(n^2)$.

Paměťová složitost výše uvedeného algoritmu je (díky užití maticové reprezentace grafu) n^2.

n je počet vrcholů grafu (počet letišť).

Reference

[1] Wikipedia. *Matice sousednosti*. http://cs.wikipedia.org/wiki/Matice_sousednosti.