Jméno a příjmení: ....Jan Horáček
Třída: ....4.F Zaměření: - Kategorie: C
Škola: ....Gymnázium, Brno, Vídeňská 47
Učitel fyziky: ....RNDr. Dagmar Bradáčová
Posudek: Posuzovali:
Úloha č.: 2

Zadání:

r_{nh} .... $\frac{2}{5}r$
ϱ_k................. $1000\ kg * m^{-3}$
$r < v$

Řešení:

a) $\rho_{val} = ?\, kg * m^{-3}$

Jelikož je váleček v klidu, můžeme vycházet z předpokladu, že síly, které na váleček působí, jsou v rovnováze. Jmenovitě pak $F_G = F_{VZ}$. Tuto rovnost použijeme pro vyjádření hustoty válečku ϱ_{val}:
(V_{ph} vyjadřuje objem tělesa pod hladinou)

$$F_G = F_{VZ}$$
$$m * g = V_{ph} * \varrho_k * g$$
$$\rho_{val} * V_{val} = V_{ph} * \varrho_k$$

Objem tělesa pod hladinou lze vyjádřit jako:
(V_{nh} vyjadřuje objem tělesa nad hladinou)

$$V_{ph} = V_{val} - V_{nh}$$

Po dosazení do vztahu pro rovnost sil:

$$\rho_{val} * V_{val} = (V_{val} - V_{nh}) * \rho_k$$
$$\rho_{val} * V_{val} = V_{val} * \varrho_k - V_{nh} * \rho_k$$
$$\rho_{val} = \rho_k - \frac{V_{nh} * \rho_k}{V_{val}}$$

Beze ztráty na obecnosti řešení lze nahradit válec dvourozměrným tělesem, tedy kruhem (3. rozměr se ve zlomku pokrátí):

$$\rho_{val} = \rho_k - \frac{S_{nh} * \rho_k}{S_{val}}$$

Obsah tohoto kruhu lze spočítat podle známého vztahu:

$$S_{val} = \pi r^2$$

Objem části nad hladinou lze vypočítat podle vztahu pro obsah kruhové úseče:

$$S_{nh} = \frac{r^2}{2} * (\propto - \sin \propto)$$

V našem případě můžeme vyjádřit $\propto$ jako:

$$\frac{\propto}{2} = \cos^{-1}\left(\frac{\frac{3}{5} * r}{r}\right)$$

$$\frac{\propto}{2} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\propto = 2 * \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

A obsah úseče je tedy roven:

$$S_{nh} = \frac{r^2}{2} * \left(2 * cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \sin\left(2 * cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right)$$

Po dosazení do vztahu pro rovnost sil:

$$\rho_{val} = \varrho_k - \frac{\frac{r^2}{2} * \left(2 * cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - sin\left(2 * cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right) * \varrho_k}{\pi r^2}$$

$$\rho_{val} = \varrho_k - \frac{\left(2 * cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - sin\left(2 * cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right) * \varrho_k}{2\pi}$$

Pro konkrétní hodnoty:

$$\rho_{val} = 1000 - \frac{\frac{1}{2} * \left(2 * cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - sin\left(2 * cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right) * 1000}{\pi} kg * m^{-3}$$

$$\underline{\underline{\rho_{val} \doteq 857{,}62\ kg * m^{-3}}}$$

---

b) $\varrho_{k2} < \varrho_k$

Při řešení této úlohy vycházíme opět z rovnosti tíhové síly F_G a vztlakových sil F_{VZ1}a F_{VZ2}, které jsou způsobeny jednotlivými kapalinami. Platí tedy vztah:

$$F_G = F_{VZ1} + F_{VZ2}$$

Nyní provedeme kroky pro vyjádření ϱ_2:

$$mg = V_1\rho_1 g + V_2\rho_2 g$$

V_1 a V_2a m vyjádříme za pomocí objemu válce:

$$V_1 = V_1$$
$$V_2 = V - V_1$$
$$m = V * \rho$$

Dosadíme do vztahu pro rovnost sil:

$$V\rho g = V_1\rho_1 g + (V - V_1)\rho_2 g$$
$$V\rho = V_1\rho_1 + V\rho_2 - V_1\rho_2$$

Pro zjednodušení si můžeme dovolit u takového válce zanedbat jeho 3. rozměr (hloubku, resp. výšku) a pracovat pouze s plochou:

$$S\rho = S_1\rho_1 + S\rho_2 - S_1\rho_2$$

Obsah úseče vyjádříme podle známého vztahu a pro zjednodušení zavedeme substituci $x = \alpha - \sin\alpha$:

$$\pi r^2 \rho = \frac{r^2}{2} x\rho_1 + \pi r^2 \rho_2 - \frac{r^2}{2} x\rho_2$$
$$\pi\rho = \frac{1}{2} x\rho_1 + \pi\rho_2 - \frac{1}{2} x\rho_2$$

$$\rho_2 = \frac{\pi\rho - 0.5 * x * \rho_1}{\pi - 0.5 * x}$$

Návrat od substituce:

$$\rho_2 = \frac{\pi\rho - 0.5 * (\alpha - sin\,\alpha) * \rho_1}{\pi - 0.5 * (\alpha - sin\,\alpha)}$$

Podobně, jako v části a) vyjádříme α jako:

$$\propto = 2 * \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

Po dosazení do původního vztahu:

$$\rho_2 = \frac{\pi\rho - 0.5 * \left(2 * cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) - \sin\left(2 * cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right) * \rho_1}{\pi - 0.5 * \left(2 * cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) - sin\left(2 * cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right)}$$

Hustotuválečku pak vyjádříme pomocí vtahu z části a):

$$\rho_2 = \frac{\left(\pi * \left(\varrho_k - \frac{\left(2 * cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - sin\left(2 * cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right) * \varrho_k}{2\pi}\right)\right) - \left(0.5 * \left(2 * cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) - sin\left(2 * cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right) * \rho_1\right)}{\pi - 0.5 * \left(2 * cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) - sin\left(2 * cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right)}$$

Pro konkrétní hodnoty:

$$\underline{\underline{\rho_2 \doteq 783{,}45\ kg * m^{-3}}}$$
