KSI 2014/2015

Úloha 3-2: Aproximační

Jan Horáček

Gymnázium, Brno, Vídeňská 47; jan.horacek@seznam.cz

28. ledna 2015

1 Metoda bisekce

1.1 Princip

Metoda bisekce je založená, jak už název napovídá, na půlení intervalů. Metoda na počátku dostane vstupní interval (v přiloženém kódu reprezentován jeho levou hranici `x0` a pravou hranicí `x1`). Nechť jsou pro nás tyto proměnné hranicemi intervalu v průběhu celého výpočtu. Hlavní `while` cyklus funguje jednoduše tak, že se podívá na funkční hodnotu $y = f(x_N)$, kde x_N je přesně uprostřed intervalu, se kterým právě pracuje ($x_N = \frac{x_0+x_1}{2}$),

- pokud je tato funkční hodnota y kladná, je jasné, že hledaný kořen (tj. průnik s osou x) je na levé straně od bodu x_N, tudíž nastaví pravou hranici intervalu x_1 na hodnotu x_N: `x1 = xN`.
- Analogicky, pokud je y záporné, je jasné, že řešení je napravo od x_N a tak je přenastavena levá hranice intervalu.

Algoritmus takto iteruje (tedy zmenšuje interval, ve kterém se nachází řešení), dokud $y \neq 0$ a dokud je interval širší, než zadaná tolerance. Při neplatnosti libovolné z těchto podmínek (tj. algoritmus buď nalezl přesné řešení, nebo se k němu dostatečně dobře přiblížil) je vrácen právě hledaný kořen x_N a algoritmus končí.

1.2 Vlastnosti

- Konvergence této metody je poměrně pomalá. Kvocient konvergence je v průměrném případě $q = \frac{1}{2}$. Tj. obecně vzato je lineární.
- Poměrná pomalost bisekce je ale vykoupena její robustností. Jedná se o metodu, která při splnění vstupních podmínek (tj. funkce $f(x)$ protíná osu x někde mezi x_0 a x_1) vždy najde řešení. Pokud je řešení víc, najde jedno z nich.
- Metoda teoreticky dosahuje libovolné přesnosti, hrozí ovšem ztráty přesnosti díky zaokrouhlovacím chybám.

2 Metoda prosté iterace

2.1 Princip

Metoda prosté konvergence využívá toho, že z jakéhosi prvotního odhadu kořenu x_0 jsme schopni vyčíslit hodnotu funkce $f(x_0)$ a především na základě této hodnoty zvolit nové x'_0 tak, aby $f(x'_0)$ bylo blíže hledanému kořenu.

Například v případě babylonské metody využíváme toho, že odhadnout x v odmocnině $x = \sqrt{S}$ lze z předchozí hodnoty x zprůměrováním právě této hodnoty x a hodnoty $\frac{S}{x}$. To jsme se ale dostali někam jinam...

2.2 Vlastnosti

- Metoda prosté iterace je opět velmi pomalá a velmi robustní. Z principu je obecně pomalejší, než metoda bisekce.
- Metoda prosté iterace opět dokonverguje jen k jednomu kořenu.

3 Newtonova metoda

3.1 Princip

Newtonova metoda je svým principem vysoce podobná poslední uvažované metodě — metodě sečen. Newtonova metoda ale využívá matematicky pokročilejšího principu — výpočtu derivace.

Newtonova metoda očekává na vstupu počáteční odhad řešení x_0, funkci $f(x)$ a, a to je nutné zmínit, derivaci funkce $f(x)$: $g(x) = f(x)'$. Čím blíže bude odhad kořene skutečnému kořeni, tím rychleji metoda dokonverguje, obecně vzato ale není zadání odhadu kořene nutnou podmínkou pro funkčnost této metody.

Newtonova metoda zjistí směr tečny funkce $f(x)$ v bodě x_0 a aproximuje kořen místem, ve kterém protíná tečna osu x. Směrnicí hledané tečny není jiného, než právě derivace funkce v bodě x_0. S trochou trigonometrie pak dostáváme pro pronik tečny s osou x vztah (1).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

Iterací aproximujeme hodnotu x, dokud je rozdíl dvou po sobě jdoucích aproximací větší, než tolerance.

3.2 Vlastnosti

- Newtonova metoda je o řád rychlejší, kvocient konvergence je přinejmenším kvadratický (to plyne z toho, že hodnotu x_n odvozujeme zjednodušeně řečeno "chytrým způsobem").
- Vyšší rychlost konvergence je vykoupena problémy s vyráběním derivace. Krom toho, že vyrobit derivaci nějaký čas trvá, je zde problém především s tím, že funkce

nemusí mít ve všech bodech svou derivaci definovanou. Na nebojácné funkce ozbrojené proti Newtonově metodě ostrými hranami, zlomy a podobnými škaredostmi doporučuji tedy radši poslat např. metodu půlení intervalů.

- Newtonova metoda nevyžaduje precizní zadání kořene, přesto k nějakému řešení dokonverguje (např. bisekce oproti tomu vyžaduje, aby byl kořen ve vstupním intervalu). Lze říci, že se jedná o metodu extrapolační.

4 Metoda sečen

4.1 Princip

Metoda sečen je svým principem velmi podobná Newtonově metodě jen s tím rozdílem, že nevyrábí tečny, ale sečny. Této metodě tedy předhodíme dva body x_0 a x_0, na kterých je funkce definována, metoda v nich vyčíslí funkci $f(x_0)$ a $f(x_1)$ a získanými dvěma body proloží sečnu. Tam, kde sečna protne osu x (bod x_2), je aproximované řešení. V tomto bodě opět vyčíslíme funkci $f(x_2)$, proložíme sečnu body $f(x_1)$ a $f(x_2)$ a tak dále, dokud je $abs(x_n - x_{n-1}) > tolerance$.

4.2 Vlastnosti

- Metoda sečen patři k rychlejším metodám, je např. rychlejší, než metoda půlení intervalů.
- U této metody není zaručena konvergence, což vede např. k nutnosti v algoritmu definovat maximální počet iterací.