KSI 2014/2015

Úloha 3-5: Úspěšný kosmonaut investuje do pozemků

Jan Horáček
Gymnázium, Brno, Vídeňská 47; jan.horacek@seznam.cz

2. února 2015

1 Úvod

Tuto úlohu jsem se rozhodl řešit převážně teoreticky, proto v příloze najdete jen velmi primitivní řešení. O to lépe ale níže popisuji řešení, o kterém si myslím, že je opravdu ultimátní.

2 Jednoduché řešení

Algoritmus implementující toto řešení naleznete v přiloženém souboru, převážně pro to, že jsem ho stihl (oproti Chytrému řešení) naprogramovat před deadlinem o půlnoci.

Jak Jednoduché, tak i Chytré řešení vychází především z předpokladu konvexnosti útvaru. Ten je klíčový pro to, aby mohl být útvar obepnut určitým množstvím přímek. Jednoduché řešení funguje následovně:

1. Útvar obepneme do čtverce (pomocí čtyřech přímek).
2. Ve čtverci provedeme *Monte Carlo*, které nám vrátí podíl bodů trefených do zadaného útvaru vůči celkovému počtu bodů. Když tuto hodnotu vynásobíme obsahem výše zjištěného čtverce, dostaneme obsah hledaného útvaru.

Tato metoda funguje poměrně hezky, na testovacích datech dosahuje požadované přesnosti a je velmi jednoduchá.

Navíc se v ní vyskytují některé chytré myšlenky, které mě vedly k Chytrému řešení.

- Hraniční přímky je dobré vyhledávat binárně. Toto dělení omezím počtem iterací (např. 10 iterací na jednu přímku). Tím dosáhnu velmi slušné přesnosti 2^{-10} za použití minima dotazů. Nedokážu si představit efektivnější metodu.
- Obepínání útvaru je dobrá věc, protože zvýší přesnost algoritmu *Monte Carlo*. Naštěstí, obepínání lze ještě vylepšit...

3 Chytré řešení

Místo triviálního, ale poměrně chybového (rozuměj dosahujícího vysoké odchylky) algoritmu *Monte Carlo* tato metoda pouze obepíná konvexní útvar.

Představme si že útvar neobepneme 4-mi přímkami s úhlem mezi nimi 90°, ale 36-ti přímkami se vzájemnou odchylkou 10°. To nám dává přesnost na určení každé přímky za využití binárního dělení cca 2^{-13}.

Celý problém jsem tak převedl na spočtení obsahu útvaru n-úhelníku obepnutého n přímkami. To už je poměrně jednoduše řešitelný problém, když uvážíme, že dvě "sousední"přímky mají jeden společný bod. Například bychom mohli použít metodu popsanou v [1].

Navíc, vždy získáme přímky obepínající útvar — tj. takové přímky, které jsou vždy vně zadaného útvaru. Můžeme si tedy dovolit vypočítaný obsah násobit Bulharskou konstantou (např. 97 %).

Toto řešení podle mě může dosahovat obrovských přesností a to už jednoduše z toho důvodu, že z principu velmi přesně určí obsah tak odlišných útvarů, jako je čtverec a trojúhelník. V logaritmickém čase je moc.

Reference

[1] MathIsFun *Area of Irregular Polygons*
http://www.mathsisfun.com/geometry/area-irregular-polygons.html