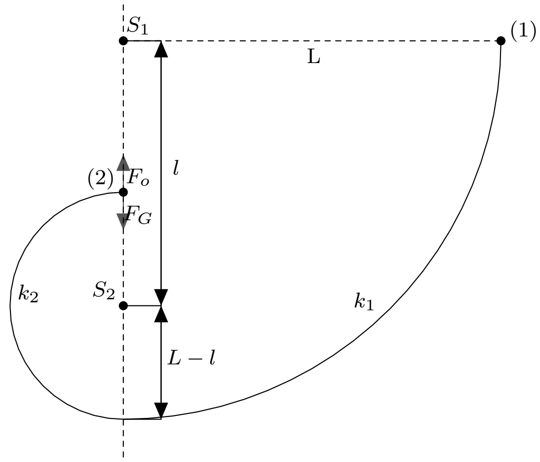
Jméno a příjmení: Jan Horáček
Třída: 6.F Zaměření: programování Kategorie: A
Škola: Gymnázium, Brno, Vídeňská 47
Posudek: Posuzovali:
Úloha č.: 1 Učitel fyziky: RNDr. Dagmar Bradáčová

1 Po kružnici

Analyzujme zadání na základě náčrtu 1, který zobrazuje požadovanou trajektorii kuličky:



Obrázek 1: Náčrt

- Ve výchozí poloze (1) má uvažovaná kulička pouze potenciální energii.

$$E_1 = E_{p1} = mgL \tag{1}$$

- V poloze (2) má kulička potenciální energii E_{p2} a kinetickou energii E_{k2}, protože má nesporně určitou rychlost.

$$E_2 = E_{p2} + E_{k2} = mg * 2(L - l) + \frac{1}{2}mv^2 \tag{2}$$

  Přítomnost nenulové energie E_{k2} je jediným důvodem (neuvažujeme-li tření) k tomu, že $l > L/2$. Pokud by E_{k2} totiž byla nulová, kulička by logicky nastoupala takovou výšku, o kterou klesla.

- Stav (2) je mezním stavem, kdy kulička má právě tolik energie, že je schopna vystoupat do výšky $2(L-l)$. Z tohoto předpokladu plyne, že v tomto stavu působí na kuličku pouze tíhová síla F_G a odstředivá síla F_o, které působí proti sobě. Nejdůležitějším závěrem ale je, že tyto 2 síly se ve stavu (2) musí rovnat.

$$\begin{aligned} F_G &= F_o \\ mg &= \frac{mv^2}{L-l} \\ v^2 &= g(L-l) \end{aligned}$$

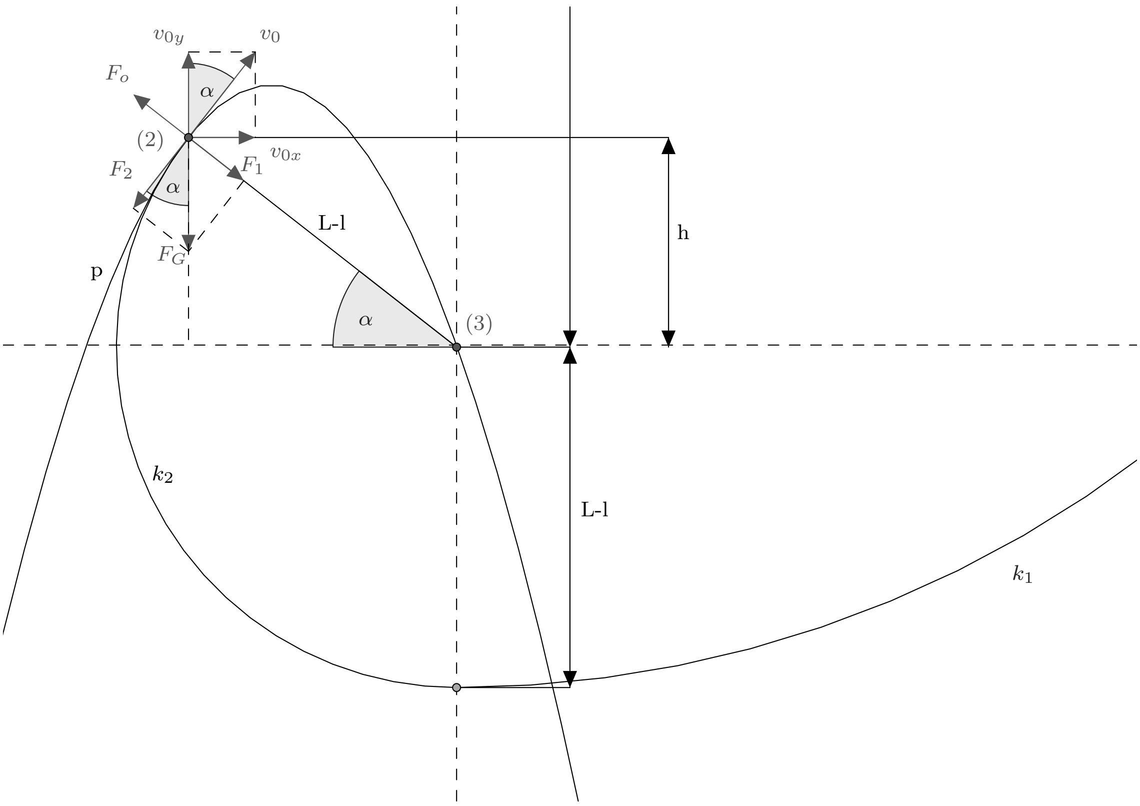
Z předpokladu "mezní"situace (nejmenší délky l) plyne také rovnost energií $E_1 = E_2$.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_o \\ E_{p1} &= E_{p2} + E_{k2} \\ mgL &= mg * 2(L-l) + \tfrac{1}{2}mv^2 \\ mgL &= mg * 2(L-l) + \tfrac{1}{2}mg(L-l) \end{aligned}$$

Po úpravách dostáváme výsledný vztah (3) pro l.

$$l = \frac{3}{5}L \tag{3}$$

2 Po kružnici a parabole



Obrázek 2: Náčrt

Uvažujme situaci tak, jak je načrtlá na náčrtu 2. Náčrt detailně rozebírá stav, ve kterém se kulička přestane pohybovat po kružnici k_2 a začne se pohybovat po parabole p. Proto je velká část kružnice k_1 z náčrtu vynechána.

Pro stav, ve kterém trajektorie kuličky přechází z kružnice v parabolu je charakteristická především rovnost odstředivé síly F_o a síly F_1 — složky tíhové síly F_G směřující do středu kružnice k_2. To plyne z toho, že velikost odstředivé síly v průběhu pohybu kuličky po kružnici k_2 neustále klesá vlivem působení tíhové síly. Kulička má tedy "stále menší schopnost udržet se na kružnici", což potvrzuje to, že se její trajektorie v určitý okamžik změní v parabolu p.

Vyjděme tedy z platnosti vztahu (4).

$$F_o = F_1 \tag{4}$$

$$\begin{aligned} F_o &= F_1 \\ \frac{mv^2}{L-l} &= m * g * sin(\alpha) \\ v_0 &= \sqrt{g * (L-l) * sin(\alpha)} \end{aligned} \tag{5}$$

Vyjádřená rychlost v_0 je rychlostí, kterou vstupuje kulička do paraboly. Vyjádřeme tuto rychlost v závislosti na menším počtu neznámých tak, že vyjdeme ze zákona zachování energie. Platí vztah (6).

$$E_{p1} = E_{p2} + E_{k2} \tag{6}$$

kde E_{p1} je počáteční potenciální energie kuličky ve vodorovné poloze, E_{k2} je kinetická energie ve stavu (2) a E_{p2} je potenciální energie ve stavu (2).

Upravujme dále tento vztah.

$$\begin{array}{rcl} E_{p1} & = & E_{p2} + E_{k2} \\ mgL & = & mg * ((L-l)+h) + \frac{1}{2}mv_0^2 \\ gL & = & g * ((L-l)+h) + \frac{1}{2}g * (L-l) * sin(\alpha) \\ L & = & ((L-l) * (1 + sin(\alpha))) + \frac{1}{2}(L-l) * sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & = & \frac{2l}{3*(L-l)} \end{array} \tag{7}$$

Dosaďme do vztahu (5).

$$v_0 = \sqrt{g * \frac{2}{3}l} \tag{8}$$

Uvědomme si nyní, že pohyb kuličky po parabole není ničím jiným, než šikmým vrhem a v_0, které jsme nyní vyjádřili, je vstupní rychlosti do tohoto vrhu. Elevační úhel šikmého vrhu je v našem případě $90° - \alpha$, abychom se ale vyhnuli součtovým vzorcům, použijeme raději přímo úhel α, který dosadíme do upravených rovnic pro šikmý vrh.

Zaveďme dvourozměrný souřadný systém (x, y) s počátkem v bodě (3), tedy v bodě, kde je ukotven hřebík. Souřadnice x roste směrem zleva doprava (na základě náčrtu), souřadnice y roste ve směru zdola nahoru (opět na základě náčrtu).

V tomto systému je pozice bodu (2) vyjádřena vztahy (9).

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & -(L-l) * cos(\alpha) \\ h = y_2 & = & (L-l) * sin(\alpha) \end{array} \tag{9}$$

Pro body na parabole pak platí vztahy (10).

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_2 + v_0t * sin(\alpha) \\ y & = & y_y + v_0t * cos(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \tag{10}$$

Dosaďme (9) do (10).

$$\begin{array}{rcl} x & = & -(L-l) * cos(\alpha) + v_0t * sin(\alpha) \\ y & = & (L-l) * sin(\alpha) + v_0t * cos(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \tag{11}$$

Hřebík se nachází na souřadnici $[0; 0]$, dosaďme tedy $x = 0$ a $y = 0$, vyjádřeme t z rovnice pro x a dosaďme do rovnice pro y.

$$
\begin{aligned}
0 &= -(L-l)*cos(\alpha)+v_0t*sin(\alpha) \\
0 &= (L-l)*sin(\alpha)+v_0t*cos(\alpha)-\tfrac{1}{2}gt^2 \\
\\
t &= \tfrac{L-l}{v_0*tg(\alpha)} \\
\\
0 &= (L-l)*sin(\alpha)+v_0\left(\tfrac{L-l}{v_0*tg(\alpha)}\right)*cos(\alpha)-\tfrac{1}{2}g\left(\tfrac{L-l}{v_0*tg(\alpha)}\right)^2 \\
4l*sin(\alpha) &= 3*(L-l)*cos^2(\alpha)
\end{aligned}
$$

Dosadíme za $sin(\alpha)$ z (7).

$$
\begin{aligned}
4l*\tfrac{2l}{3*(L-l)} &= 3*(L-l)*\left(1-\tfrac{2l}{3*(L-l)}\right) \\
3*\left(3L^2-6lL-l^2\right) &= 0 \\
l &= \pm L(2\sqrt{3}-3)
\end{aligned}
$$

Uvažujme jen kladné řešení. Pak je kýženým vztahem pro l vztah (12).

$$l = L(2\sqrt{3}-3) \tag{12}$$