Jméno a příjmení: Jan Horáček
Třída: 6.F Zaměření: programování Kategorie: A
Škola: Gymnázium, Brno, Vídeňská 47
Posudek: Posuzovali:
Úloha č.: 5 Učitel fyziky: RNDr. Dagmar Bradáčová

1 Úplný odraz světla

Pro úplný odraz světla musí být splněn vztah (1).

$$\sin(\alpha_m) = n^{-1} \tag{1}$$

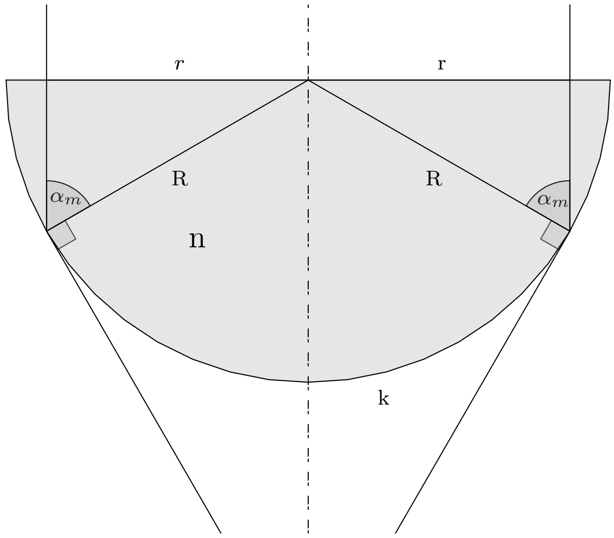
Z náčrtu dále plyne, že platí vztah (2).

$$sin(\alpha_m) = \frac{r}{R} \tag{2}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} sin(\alpha_m) &= sin(\alpha_m) \\ \tfrac{r}{R} &= n^{-1} \\ 2r &= \tfrac{2R}{n} \end{aligned}$$

Pro $n = 1.5$:



$$2r = \frac{4}{3}R$$

2 Protínání optické osy

2.1 d_{min}

Z náčrtu 2 plyne, že optickou osu protínají v nejmenší vzdálenosti d_{min} paprsky, které dopadají na vnitřní stranu polokoule právě pod mezním úhlem α_m. Z náčrtu plyne, že platí sinova věta (3).

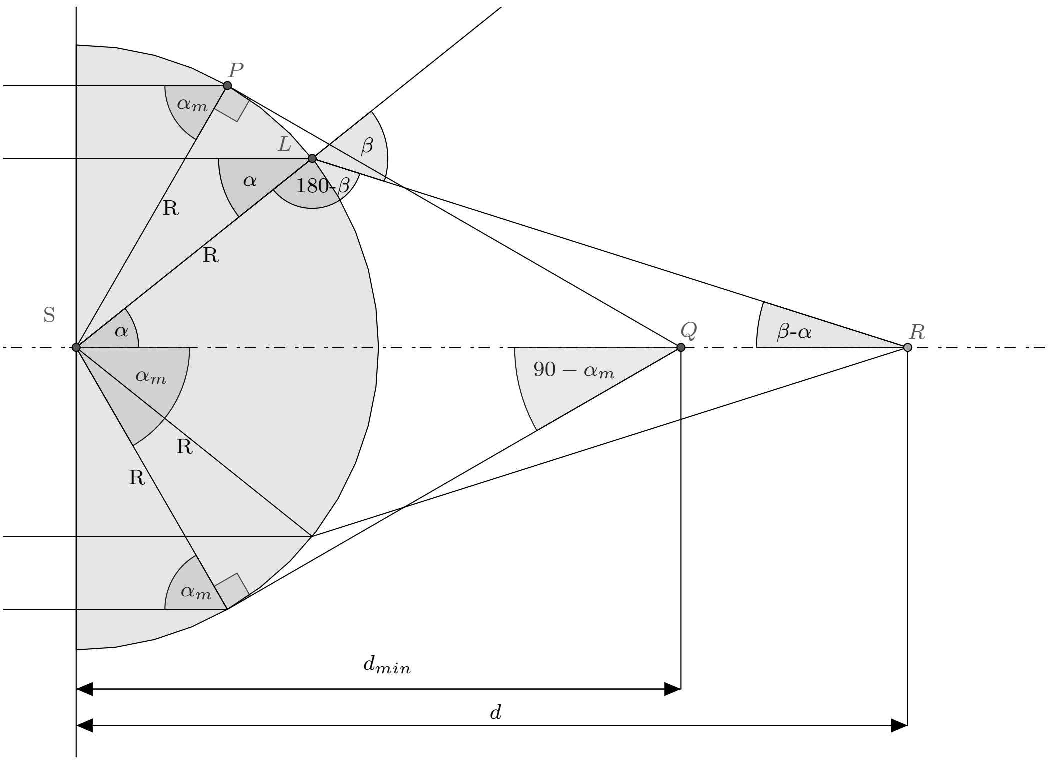
$$\frac{sin(90° - \alpha_m)}{R} = \frac{sin(90°)}{d_{min}} \tag{3}$$

Po úpravách za využití součtových vzorců a goniometrické jedničky získáváme pro d_{min} hledaný vztah (4).

$$d_{min} = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}} \tag{4}$$

Pro $n = 1.5$:

$$d_{min} = \frac{3R\sqrt{5}}{5} \tag{5}$$



Obrázek 1: Náčrt situace

2.2 d_{max}

Určení d_{max} už není tak jednoduché, pro jeho stanovení jsem se rozhodl postupovat následovně:

1. Najdeme funkci $d = d(\alpha)$.
2. Najdeme maximum funkce pomocí položení první derivace nule.
3. Získaný úhel α dosadíme do $d(\alpha)$ a tím vyjádříme vzdálenost d_{max}.

Z náčrtu plyne, že platí sinova věta ve tvaru (6).

$$\frac{sin(\beta-\alpha)}{R} = \frac{sin(180^\circ-\beta)}{d} \tag{6}$$

Tento vztah upravíme opět za využití součtového vzorce a goniometrické jedničky na vztah (7).

$$d(\alpha) = d = \frac{nR}{n * cos(\alpha) - \sqrt{1-n^2 * sin^2(\alpha)}} \tag{7}$$

První derivaci položíme rovnu nule a vyjádříme α.

$$\begin{aligned} d(\alpha)' = \frac{d}{d\alpha}\frac{nR}{n{*}cos(\alpha)-\sqrt{1-n^2{*}sin^2(\alpha)}} &= 0 \\ -\frac{nR\left(\frac{n^2 sin(x)cos(x)}{\sqrt{1-n^2 sin^2(\alpha)}}\right)}{\left(n{*}cos(x)-\sqrt{1-n^2 sin^2(\alpha)}\right)^2} &= 0 \\ \alpha &= 0 \end{aligned}$$

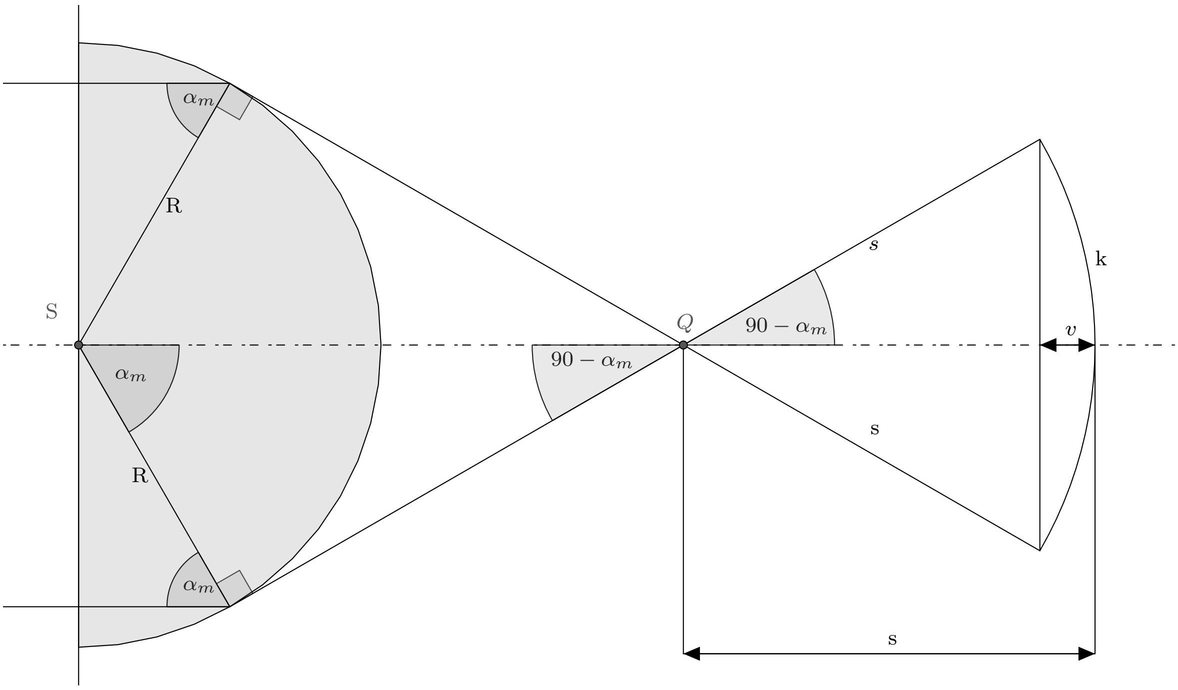
Z grafu funkce (7) plyne, že se jedná o maximum. Dosadíme do (7).

$$\begin{aligned} d_{max} &= d(0) = \frac{nR}{n*cos(0) - \sqrt{1 - n^2 * sin^2(0)}} \\ d_{max} &= \frac{nR}{n-1} \end{aligned}$$

Pro $n = 1.5$ dostáváme vztah (8).

$$d_{max} = 3R \tag{8}$$

3 Prostorový úhel



Obrázek 2: Náčrt

Proveďme úvahu na základě náčrtu 3 : největší plochy uvažované kulové plochy k (v náčrtu je zobrazen pouze řez touto kulovou plochou) dosáhneme při naximálním úhlu u vrcholu Q. Světelné paprsky, pro které je tento úhel maximální, jsou paprsky, které na vnitřní stranu polokoule dopadají pod mezním úhlem α_m. Proto budeme uvažovat úhel $90° - \alpha_m$.

Pro prostorový úhel Ω v našem případě platí vztah (9).

$$\Omega = \frac{S}{s^2} \tag{9}$$

kde S je obsah kulové plochy k a s je poloměr koule, kterou k měření prostorového úhlu využíváme - v našem případě s.

Z geometrie úlohy plyne, že platí vztah (10).

$$\begin{aligned} cos(90° - \alpha) &= \frac{s-v}{s} \\ v &= s * (1 - cos(90° - \alpha)) \end{aligned} \tag{10}$$

Vypočteme kulovou S plochu na základě platnosti vztahu (11) a dosadíme do (9).

$$S = 2\pi sv \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\Omega &= \tfrac{2\pi sv}{s^2} \\
\Omega &= \tfrac{2\pi s * (1 - cos(90^\circ - \alpha))}{s} \\
\Omega &= 2\pi(1 - cos(90^\circ - arcsin(n^{-1}))) \\
\Omega &= 2\pi(1 - n^{-1})
\end{aligned}$$