Jméno a příjmení: Jan Horáček
Třída: 6.F | Zaměření: programování | Kategorie: A
Škola: Gymnázium, Brno, Vídeňská 47
Posudek: | Posuzovali:
Úloha č.: 3 | Učitel fyziky: RNDr. Dagmar Bradáčová

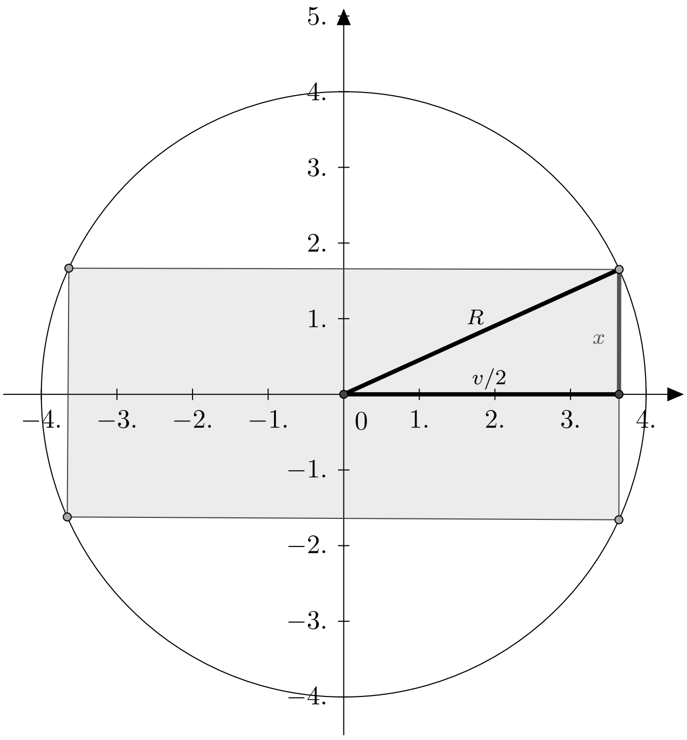
1 Setrvačník s maximální hmotností

1.1 Analýza situace

Při řešení této úlohy jsem se rozhodl postupovat následovně:

1. Nalézt funkci závislosti poloměru x válce na jeho výšce v tak, aby zaujímal při vepsání do koule maximální objem.
2. Nalézt funkci závislosti objemu válce V na výšce tohoto válce v.
3. Nalézt extrémy této funkce jejím derivováním podle v a položením derivace rovné nule.
4. Nalézt maximum funkce pro kladné v a z této hodnoty vyjádřit požadované veličiny m_1 a J_1.

Na obrázku 1 je náčrt celé situace - řez koulí jejím rovinou procházející jejím středem kolmou na podstavy hledaného válce. Řez hledaným válcem je zvýrazněn šedou barvou.



Obrázek 1: Náčrt situace

1.2 Výpočet

Vyjděme z následujícího předpokladu: pro maximalizaci hmotnosti válce je nutné maximalizovat jeho objem. Objem válce V vypočteme dle tabulkového vztahu (1).

$$V = \pi v x^2 \tag{1}$$

kde proměnná x je poloměr dolní podstavy válce a v výška válce (viz náčrt 1).

Mezi proměnnými x a v existuje vztah (2) plynoucí z náčrtu 1.

$$x^2 = R^2 - \frac{v^2}{4} \tag{2}$$

Dosazením (2) do (1) dostáváme vztah (3).

$$V = \pi v \left(R^2 - \frac{v^2}{4}\right) \tag{3}$$

kde máme jen jednu proměnnou v. Poloměr koule R je konstanta.

Tento vztah derivujeme podle v a výslednou funkci položíme rovnu nule. Vyjádříme hodnotu v.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv}\left(\pi v \left(R^2 - \frac{v^2}{4}\right)\right) &= 0 \\ \pi \left(R^2 - \frac{3v^2}{4}\right) &= 0 \\ v &= \pm\frac{2R}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{4}$$

Uvažujme jen kladné řešení. Pro objem válce V_1 tedy dostáváme vztah (5).

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi v \left(r^2 - \tfrac{v^2}{4}\right) \\ V_1 &= \pi \tfrac{2R}{\sqrt{3}} \left(R^2 - \tfrac{4R^2}{12}\right) \\ V_1 &= \tfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{5}$$

Vyjádřeme hmotnost válce m_1. Pakliže je koule i ní vyrobený válec ze stejného materiálu, platí, na základě rovnosti hustot, rovnice (**??**).

$$\frac{V_1}{V_o} = \frac{m_1}{M} \tag{6}$$

kde V_o je objem koule. Po dosazení objemu koule jako $V_o = \frac{4}{3}\pi R^3$, vyjádření V_1 z (5) a úpravách dostáváme kýžený vztah (7) pro hmotnost vysoustruženého válce m_1.

$$m_1 = \frac{M}{\sqrt{3}} \tag{7}$$

Nyní vypočtěme moment setrvačnosti J_1 takového válce. Vyjděme z předpokladu, že moment setrvačnosti obecného plného válce J je vyjádřen vztahem (8).

$$J = \frac{1}{2} m x^2 \tag{8}$$

Po dosazení hmotnosti válce ze vztahu (7) do vztahu (8) dostáváme vztah (9).

$$\begin{aligned} J_1 &= \tfrac{M}{2\sqrt{3}} * x^2 \\ J_1 &= \tfrac{M}{2\sqrt{3}} * \left(R^2 - \tfrac{v^2}{4}\right) \\ J_1 &= \tfrac{MR^2}{3\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{9}$$

2 Setrvačník s maximálním momentem setrvačnosti

Zopakujme si ještě jednou vztah (8) pro výpočet momentu setrvačnosti plného válce.

$$J = \frac{1}{2} m x^2 \tag{10}$$

Už z tohoto vztahu je zřejmé, že pro dosažení maximálního momentu setrvačnosti J je pro nás mnohem důležitější proměnná x, tedy poloměr válce, než-li jeho hmotnost m a to pro to, že hmotnost válce ve vztahu figuruje pouze jako lineární člen, kdežto poloměr x ve vztahu figuruje jako kvadrát.

Toto pozorování jsem se ale rozhodl využít pouze pro odhad výsledku. Přesné určení požadovaného válce provedeme opět nalezením maxima funkce. Tentokrát se ale nebude jednat o funkci vyjadřující hmotnost, ale o funkcí vyjadřující moment setrvačnosti. Konkrétně o funkci (10).

Vyšetříme průběh funkce:

$$
\begin{aligned}
\left(J(x) = \tfrac{1}{2}m_2x^2\right)' &= 0\\
\left(\tfrac{1}{2}m_2x^2\right)' &= 0\\
\left(\tfrac{1}{2}\rho V_2x^2\right)' &= 0\\
\left(\tfrac{1}{2}\rho\pi v\left(r^2-\tfrac{v^2}{4}\right)x^2\right)' &= 0\\
\left(\tfrac{1}{2}\rho\pi v\left(r^2-\tfrac{v^2}{4}\right)^2\right)' &= 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Po provedení derivace dostaneme celkem 4 řešení:
$v = \pm 2R$
$v = \pm\frac{2R}{\sqrt{5}}$
Interpretace těchto řešení je poměrně snadná: záporná řešení jsou nesmysl, proto je nebudeme dále uvažovat. Kořen $v = 2r$ je minimem funkce - pro setrvačník dlouhý jako poloměr koule je jeho poloměr (rozuměj válce) a tudíž i moment setrvačnosti velmi malý (viz vztah (10)). Řešení $v = \pm\frac{2R}{\sqrt{5}}$ je hledaným maximem funkce. Vyjádříme tedy hledané proměnné (podobně, jako v předchozí části úlohy, jen dosazujeme v za výše vyjádřené):

$$
\begin{aligned}
m_2 &= \frac{\pi v*\left(R^2-\frac{v^2}{4}\right)}{\frac{4}{3}\pi R^3}\\
m_2 &= \frac{6M}{5\sqrt{5}}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Vypočteme J_2:

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \frac{6M}{10\sqrt{5}} * x^2\\
J_2 &= \frac{12MR^2}{25\sqrt{5}}
\end{aligned}
\tag{13}
$$